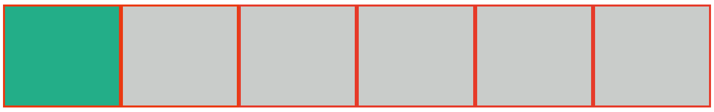
Concepto de fracción

Unidad fraccionaria

La **unidad fraccionaria** es cada una de las partes que se obtienen al dividir la unidad en n partes iguales.

$\frac{1}{3}$



$\frac{1}{6}$

Concepto de fracción

Una **fracción** es el **cociente** de **dos números enteros** a y b, que representamos de la siguiente forma:

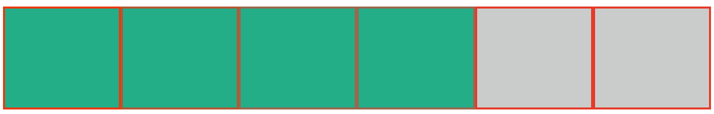
$$\frac{a}{b} \qquad b \neq 0$$

b, ***denominador***, indica el número de partes en que se ha dividido la unidad.

a, **numerador**, indica el número de unidades fraccionarias elegidas.

Representación de fracciones

$\frac{2}{3}$



$\frac{4}{6}$

La fracción como partes de la unidad

Un todo se toma como unidad. La **fracción** expresa un **valor** con relación a ese todo.

Un depósito contiene 2/3 de gasolina.

El todo: el depósito. La **unidad** equivale a **3/3**, en este caso; pero en general sería una **fracción** con el mismo número en el numerador y el denominador.

2/3 de gasolina expresa la relación existente entre la gasolina y la capacidad del depósito. De sus tres partes dos están ocupadas por gasolina.

La fracción como cociente

Repartir 4 € entre 5 amigos.

$$\frac{4}{5} = 0.8 \text{ centimos}$$

La fracción como operador

Para calcular la **fracción** de un número, multiplicamos el numerador por el número y el resultado lo dividimos por el denominador.

Calcular los 2/3 de 60 €.

2 · 60= 120

120 : 3 = **40 €**

La fracción como razón y proporción

Cuando comparamos dos cantidades de una magnitud, estamos usando las **fracciones** como **razones**.

Así, cuando decimos que la **proporción** entre chicos y chicas en el Instituto es de 3 a 2, estamos diciendo que por cada 3 chicos hay 2 chicas, es decir, que de cada cinco estudiantes, 3 son chicos y 2 son chicas.

Un caso particular de aplicación de las **fracciones** como **razón** son los **porcentajes**, ya que éstos no son más que la relación de proporcionalidad que se establece entre un número y 100 (tanto por ciento), un número y mil (tanto por mil) o un número y uno (tanto por uno).

Luís compra una camisa por 35 €, le hacen un descuento del 10%. ¿Cuánto pagará por la camisa?

35 · 10 = 350

350 : 100 = 3.5

35 − 3.5 = **31.5 €**

Clasificación de fracciones

Fracciones propias

Las **fracciones propias** son aquellas cuyo **numerador** es **menor** que el **denominador**. Su valor comprendido entre cero y uno

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{7}{10}$$

Fracciones impropias

Las **fracciones impropias** son aquellas cuyo **numerador** es **mayor** que el **denominador**. Su valor es mayor que 1.

$$\frac{5}{3}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{13}{10}$$

Número mixto

El ***número mixto*** *o* ***fracción mixta*** está compuesto de una **parte entera** y otra **fraccionaria**.

Para pasar de **número mixto** a **fracción impropia**, se deja el **mismo denominador** y el **numerador** es la **suma del producto** del entero por el **denominador más el numerador**, del **número mixto**.

$$3\frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{17}{5}$$

Para pasar una **fracción impropia** a **número mixto**, se **divide** el **numerador** por el **denominador**. El **cociente** es el **entero del número mixto** y el **resto el numerador** de la **fracción**, siendo el **denominador** el **mismo**.

$$\begin{array}{r|l} 13 & \underline{5} \\ 3 & 2 \end{array} \qquad\qquad \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$$

Fracciones unitarias

Las **fracciones unitarias** tienen el **numerador igual** al **denominador**.

$$\frac{3}{3}, \quad \frac{5}{5}, \quad \frac{10}{10}$$

Fracciones decimales

Las **fracciones decimales** tienen como **denominador** una **potencia de 10**.

$$\frac{23}{100}, \quad \frac{12}{1000}, \quad \frac{3}{10}$$

Fracciones equivalentes

Dos **fracciones** son **equivalentes** cuando el **producto de extremos** es **igual al producto de medios**.

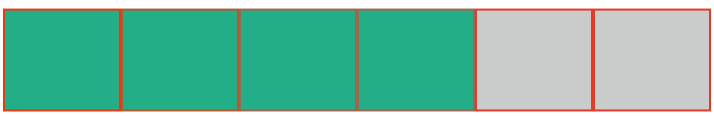
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \textit{si} \qquad a \cdot d = b \cdot c$$

a y d son los extremos; b y c, los medios.

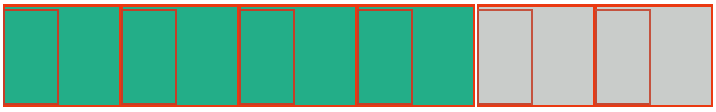
Calcula si son equivalentes las fracciones:

$$\frac{4}{6} \text{ y } \frac{8}{12}$$

$4 \cdot 12 = 6 \cdot 8$ 48 = 48 **Sí**



$\frac{4}{6}$



$$\frac{8}{12}$$

Si se multiplica o divide el numerador y denominador de una fracción por un número entero, distinto de cero, se obtiene otra fracción equivalente a la dada.

Al primer caso le llamamos ampliar o amplificar.

$$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15} \qquad \frac{2}{3} = \frac{10}{15} \qquad 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 \quad 30 = 30$$

Simplificar fracciones

Simplificar una **fracción** es transformarla en una **fracción equivalente** más simple.

Para **simplificar** una **fracción dividimos numerador y denominador** por un **mismo número**.

Empezaremos a **simplificar** probando por los primeros **números primos**: 2, 3, 5, 7, ... Es decir, probamos a **dividir numerador y denominador** entre **2** mientras se pueda, después pasamos al **3** y así sucesivamente.

Se repite el proceso hasta que no haya más divisores comunes.

Si los términos de la **fracción** terminan en **ceros**, empezaremos quitando los **ceros comunes** finales del **numerador y denominador**.

Si el número por el que dividimos es el **máximo común denominador** del **numerador y denominador** llegamos a una **fracción irreducible**.

$$\frac{8:4}{36:4} = \frac{2}{9} \qquad \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \qquad 8 \cdot 9 = 36 \cdot 2 \quad 72 = 72$$

Fracciones irreducibles

Las **fracciones irreducibles** son aquellas que **no** se pueden **simplificar**, esto sucede cuando el **numerador y el denominador** son **primos** entre sí, .

$$\frac{5}{7}, \quad \frac{6}{13}, \quad \frac{2}{5}$$

Reducción de fracciones a común denominador

Reducir varias **fracciones a común denominador** consiste en convertirlas en otras **equivalentes** que tengan el **mismo denominador**. Para ello:

1º Se determina el **denominador común**, que será el **mínimo común múltiplo de los denominadores**.

2º Este **denominador común**, se **divide** por cada uno de los **denominadores**, **multiplicándose** el **cociente** obtenido por el **numerador** correspondiente.

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{1}{9}$$

$12 = 2^2 \cdot 3$

$9 = 3^2$

m.c.m.$(3.\ 12.\ 9) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

$$\frac{24}{36}, \quad \frac{15}{36}, \quad \frac{4}{36}$$

Ordenar fracciones

Fracciones con igual denominador

De dos **fracciones** que tienen el **mismo denominador** es **menor** la que tiene **menor numerador**.

$$\frac{4}{6} < \frac{5}{6}$$

Fracciones con igual numerador

De **dos fracciones** que tienen el **mismo numerador** es **menor** el que tiene **mayor denominador**.

$$\frac{4}{12} < \frac{4}{7}$$

Con numeradores y denominadores distintos

En primer lugar las tenemos que poner a **común denominador**.

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{1}{9}$$

$$\frac{24}{36}, \quad \frac{15}{36}, \quad \frac{4}{36}$$

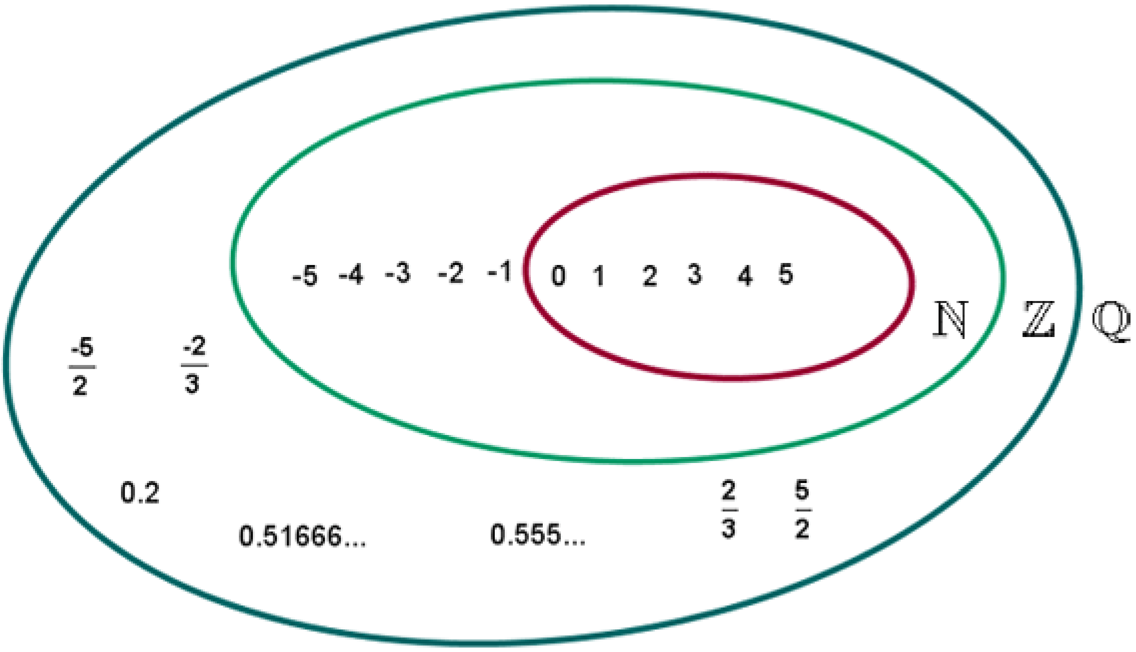
Es **menor** la que tiene **menor numerador**.

$$\frac{1}{9} < \frac{5}{12} < \frac{2}{3}$$

Números racionales

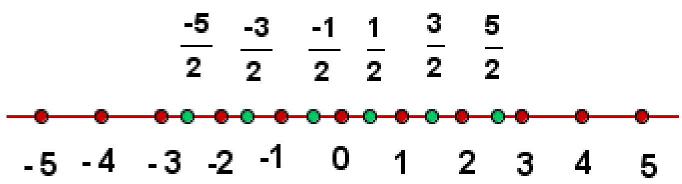
Se llama **número racional** a todo **número** que puede representarse como el **cociente** de **dos enteros**, con denominador distinto de cero. Se representa por $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z}; \ b \in \mathbb{Z}; \ b \neq 0 \right\}$$



Representación de números racionales

Los **números racionales** se representan en la recta junto a los **números enteros**.

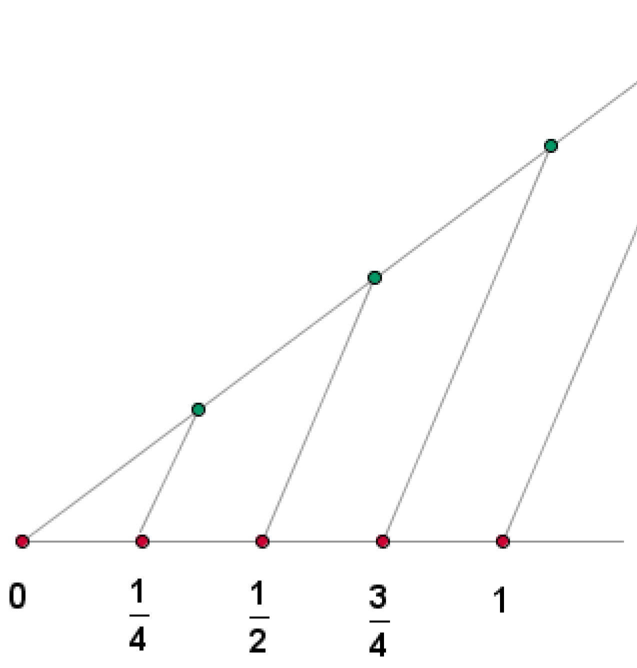


Para **representar** con precisión los **números racionales**:

1Tomamos un segmento de longitud la unidad, por ejemplo.

2Trazamos un segmento auxiliar desde el origen y lo dividimos en las partes que deseemos. En nuestro ejemplo, lo dividimos en 4 partes.

3Unimos el último punto del segmento auxiliar con el extremo del otro segmento y trazamos segmentos paralelos en cada uno de los puntos, obtenidos en la partición del segmento auxiliar.



En la práctica se utilizan **número racional** y **fracción** como **sinónimos**.

Suma y resta de fracciones

Con el mismo denominador

Se **suman** o se **restan** los **numeradores** y se mantiene el **denominador**.

$$\frac{5}{7}+\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

$$\frac{5}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$$

Con distinto denominador

En primer lugar se **reducen los denominadores a común denominador**, y se **suman** o se **restan** los **numeradores** de las **fracciones equivalentes** obtenidas.

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{15+2}{12}=\frac{17}{12}$$

$$\frac{5}{4}-\frac{1}{6}=\frac{15-2}{12}=\frac{13}{12}$$

Multiplicación de fracciones

La **multiplicación** de dos **fracciones** es otra **fracción** que tiene:

Por **numerador** el **producto** de los **numeradores**.

Por **denominador** el **producto** de los **denominadores**.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$$

División de fracciones

La **división** de dos **fracciones** es otra **fracción** que tiene:

Por **numerador** el **producto** de los **extremos**.

Por **denominador** el producto de los **medios**.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

$$\frac{5}{7}:\frac{1}{6}=\frac{30}{7}$$

.

Potencias de fracciones

Potencias de exponente entero y base racional

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{n}=\frac{a^{n}}{b^{n}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=\frac{2^{4}}{3^{4}}=\frac{16}{81}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^{4} = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$$

Propiedades

1. $\left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1$

2. $\left(\frac{a}{b}\right)^{1} = \frac{a}{b}$

3. **Producto de potencias con la misma base**:

Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

4. **División de potencias con la misma base**:

Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m} : \left(\frac{a}{b}\right)^{n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{7} : \left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{7-3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

5. **Potencia de una potencia**:

Es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$$

$$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{64}$$

6. Producto de potencias con el mismo exponente:

Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el producto de las bases

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a \cdot c}{b \cdot d}\right)^n$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{6}{35}\right)^3$$

7. Cociente de potencias con el mismo exponente:

Es otra potencia con el mismo exponente y cuya base es el cociente de las bases.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a \cdot d}{b \cdot c}\right)^n$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 : \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \left(\frac{21}{10}\right)^3$$

Operaciones combinadas con fracciones

Prioridades

1º. Pasar a f**racción los números mixtos y decimales**.

2º. Calcular las **potencias y raíces**

3º. Efectuar las operaciones entre **paréntesis, corchetes y llaves..**

4º. Efectuar los **productos** y **cocientes**.

5º. Realizar las **sumas** y **restas**.

$$\left[\left(2 - 1\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{8} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(7\frac{1}{2}\right)^3\right] : \left(5 - \frac{6}{5}\right) =$$

Primero operamos con las **productos** y **números mixtos** de los **paréntesis**.

$$=\left[\left(2-\frac{8}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{15}\right)^4\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^3\right]:\left(5-\frac{6}{5}\right)=$$

Operamos en el primer **paréntesis**, quitamos el segundo, simplificamos en el tercero y operamos en el último.

$$=\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{15}{2}\right)^3\right]:\frac{19}{5}=$$

Realizamos el **producto** y lo **simplificamos**.

$$=\left(\frac{4}{25}+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}-\frac{54000}{5000}\right):\frac{19}{5}=\left(\frac{4}{25}+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}-\frac{54}{5}\right):\frac{19}{5}=$$

Realizamos las **operaciones del paréntesis**.

$$=\frac{32+125-150-2160}{200}:\frac{19}{5}=$$

Hacemos las **operaciones** del **numerador**, **dividimos** y **simplificamos** el resultado.

$$=\frac{-2153}{200}:\frac{19}{5}=-\frac{10765}{3800}=-\frac{2153}{760}$$

Fracción generatriz

Un **número decimal exacto** o **periódico** puede expresarse en forma de **fracción**, llamada ***fracción generatriz***, de las formas que indicamos:

Pasar de decimal exacto a fracción

Si la **fracción** es ***decimal exacta***, la **fracción** tiene como **numerador** el **número** dado **sin la coma**, y por **denominador**, la **unidad** seguida de tantos **ceros** como **cifras decimales** tenga.

$$1.13=\frac{113}{100}\qquad 0.1769=\frac{1769}{10000}\qquad 2234.1=\frac{22341}{10}$$

Pasar de periódico puro a fracción generatriz

Si la **fracción** es ***periódica pura***, la **fracción generatriz** tiene como **numerador** el **número** dado **sin la coma**, **menos** la **parte entera**, y por **denominador** un **número** formado por tantos **nueves** como **cifras** tiene **el período**.

$$1.\widehat{13} = \frac{113-1}{99} = \frac{112}{99} \qquad 0.\widehat{1769} = \frac{1769}{9999}$$

$$2234.\widehat{1} = \frac{22341-2234}{9} = \frac{20107}{9}$$

Pasar de periódico mixto a fracción generatriz

Si la **fracción** es ***periódica mixta***, la **fracción generatriz** tiene como **numerador** el **número** dado **sin la coma**, **menos** la **parte entera** seguida de las **cifras decimales no periódicas**, y por **denominador**, un **numero** formado por tantos **nueves** como cifras tenga el **período**, seguidos de tantos **ceros** como cifras tenga la **parte decimal no periódica**.

$$1.1\widehat{3} = \frac{113-11}{90} = \frac{102}{90} = \frac{17}{15}$$

$$0.17\widehat{69} = \frac{1769-17}{9900} = \frac{1752}{9900} = \frac{438}{2475}$$

$$2.2\widehat{341} = \frac{22341-22}{9990} = \frac{20107}{9990} = \frac{22319}{9990}$$